

УДК 538.9

doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-11

Спиновая модель дельта-цепочки с конкурирующими обменными взаимодействиями

В. Я. Кривнов¹, Д. В. Дмитриев²

^{1,2}Институт биохимической физики имени Н. М. Эмануэля
Российской академии наук, Москва, Россия

¹krivnov@deom.chph.ras.ru, ²dmitriev@deom.chph.ras.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Низкоразмерные квантовые магнетики на геометрически фрустрированных решетках вызывают в последнее время значительный интерес. Типичным примером таких систем является дельта-цепочка – линейная цепь треугольников со спинами в вершинах. Дельта-цепочка с AF-взаимодействиями изучена довольно подробно и обладает рядом необычных свойств. Однако эта же модель с конкурирующими ферро (F)- и антиферромагнитными (AF) взаимодействиями изучена существенно меньше. Целью данной работы является изучение дельта-цепочки с F- и AF-анизотропными взаимодействиями на критической линии, разделяющей фазы основного состояния, определение степени вырождения основного состояния, остаточной энтропии и других магнитных свойств. *Материалы и методы.* Изучение модели основано как на аналитическом рассмотрении, так и на результатах численных расчетов. Предложен метод построения точных волновых функций основного состояния и подсчет их числа в каждом спиновом секторе. Аналитические результаты сравнены с численными расчетами конечных цепочек. *Результаты.* Показано, что основное состояние F-AF дельта-цепочки на критической линии состоит из локализованных состояний магнонов. Наряду с многомагнонными изолированными состояниями существуют также связанные комплексы магнонов, и их вклад в множество основных состояний является преобладающим в термодинамическом пределе. *Выводы.* Спиновые системы с макроскопически вырожденным основным состоянием и остаточной энтропией демонстрируют значительный магнитокалорический эффект. Учитывая большой прогресс в синтезе низкоразмерных фрустрированных магнетиков, можно надеяться, что будут получены реальные соединения типа F-AF дельта-цепочки с параметрами, близкими к критическим, которые могут быть использованы для создания эффективных магнитоохлаждающих устройств.

Ключевые слова: квантовые магнетики, фрустрация, магноны, макроскопическое вырождение

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственный регистрационный номер темы исследования 122041400110-4).

Для цитирования: Кривнов В. Я., Дмитриев Д. В. Спиновая модель дельта-цепочки с конкурирующими обменными взаимодействиями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 4. С. 141–150. doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-11

Spin delta-chain with competing exchange interactions

V.Ya. Krivnov¹, D.V. Dmitriev²

^{1,2}Institute of Biochemical Physics named after N.M. Emanuel
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹krivnov@deom.chph.ras.ru, ²dmitriev@deom.chph.ras.ru

Abstract. *Background.* Low-dimensional quantum magnets based on geometrically frustrated lattices are of considerable interest last time. As a typical example of such systems is the delta-chain which is a linear chain of triangles with spins on vertices. The delta-chain with AF exchange interactions is well studied and has a number of unusual properties. However, the same model with competing ferro (F)-and antiferromagnetic (AF) interactions is less studied. The purpose of this work is the study of the anisotropic F-AF delta-chain on the critical line separating different ground state phases, the calculation of the ground state degeneracy, residual entropy etc. *Materials and methods.* The study of this model is both analytically and numerically. It is proposed a method of construction of exact ground state wave functions and accounting of the number of ground states in each spin sector. The analytical results are confirmed by numerical calculations of finite chains. *Results.* It is shown that the ground state manifold of the F-AF delta-chain on the critical line consists of localized magnons. Together with isolated magnons there are bound magnon complexes which give dominated contribution in ground state manifold in the thermodynamic limit. *Conclusions.* Spin systems with macroscopically degenerated ground state and with residual entropy demonstrate significant magnetocaloric effect. Taking into account great progress in a synthesis of frustrated magnets, it can be expected that real compounds of the F-AF delta-chain type with parameters close to critical ones will be obtained and these compounds will be used for the construction of effective magnetocooling devices.

Keywords: quantum magnets, frustration, magnons, macroscopic degeneracy

Financing: the research was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (research topic No. 122041400110-4).

For citation: Krivnov V.Ya., Dmitriev D.V. Spin delta-chain with competing exchange interactions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(4):141–150. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-11

Введение

Низкоразмерные квантовые магнетики на геометрически фрустрированных решетках вызывают в последнее время значительный интерес как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения [1–3]. Важным классом таких объектов являются соединения, состоящие из треугольных кластеров магнитных ионов. К ним относятся магнетики на двумерных и квазиодномерных решетках кагоме, пирохлор-решетках, решетках Тасаки и др. Типичным примером такой системы является так называемая дельта-цепочка, представляющая собой линейную цепь треугольников с магнитными ионами в их узлах (рис. 1).

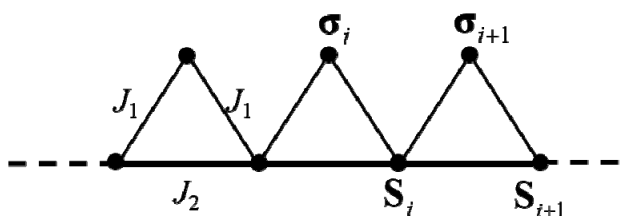


Рис. 1. Спиновая модель дельта-цепочки

Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H = J_1 \sum_{i=1}^n \left[(S_{i-1}^x + S_i^x) \sigma_i^x + (S_{i-1}^y + S_i^y) \sigma_i^y + \Delta_1 (S_{i-1}^z + S_i^z) \sigma_i^z - 2\Delta_1 S \sigma \right] + \\ + J_2 \sum_{i=1}^n \left[S_{i-1}^x S_i^x + S_{i-1}^y S_i^y + \Delta_2 S_{i-1}^z S_i^z - \Delta_2 S^2 \right] - h \sum_{i=1}^n (\sigma_i^z + S_i^z), \quad (1)$$

где n – число треугольников в периодической цепочке; S_i и σ_i – операторы спинов основания и вершин треугольников с квантовыми числами S и σ ; J_1 – обменное взаимодействие между спинами основания и вершин треугольников; J_2 – взаимодействие между ближайшими спинами основания дельта-цепочки; Δ_1 и Δ_2 – параметры анизотропии соответствующих взаимодействий; h – безразмерное магнитное поле. Прямое взаимодействие между спинами вершин отсутствует. Постоянные в (1) выбраны так, чтобы энергия ферромагнитного (полностью поляризованного) состояния была равна нулю.

Основное состояние $s = \frac{1}{2}$ изотропной дельта-цепочки ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1$) с обоими антиферромагнитными взаимодействиями $J_1 > 0$ и $J_2 > 0$ было изучено как функция параметра фрустрации J_2 / J_1 в работах [4–8]. При $J_2 / J_1 = \frac{1}{2}$ одномагнотные возбуждения (относительно ферромагнитного состояния) образуют бездисперсионную (плоскую) зону. Как известно, в этом случае возбуждения локализованы в конечной области решетки. Локализация одномагнотных состояний является основой для конструкции точных многомагнотных состояний, поскольку состояние, образованное независимыми (неперекрывающимися) локализованными магнонами, является точным. Подобная ситуация имеет место и для ряда других антиферромагнитных моделей на фрустрированных решетках. Эти локализованные состояния являются основными при насыщающем магнитном поле. Как результат, основное состояние макроскопически вырождено и определение степени вырождения (числа локализованных основных состояний) сводится к соответствующей задаче классической статистической механики. В частности, для дельта-цепочки число таких состояний равно $1,618^n$.

Основными особенностями антиферромагнитной дельта-цепочки, обусловленными наличием макроскопически вырожденных состояний, являются плато в кривой намагниченности, конечная энтропия при нулевой температуре и низкотемпературный максимум теплоемкости.

В то же время дельта-цепочка с ферромагнитным ($J_1 < 0$) и антиферромагнитным ($J_2 > 0$) взаимодействиями (F-AF дельта-цепочка) также вызывает большой интерес в последнее время. F-AF дельта-цепочка со спинами основания и вершин треугольников $S = \sigma = \frac{1}{2}$ описывает реальные соединения, в частности комплексы $[\text{CuH}_2\text{O}][\text{Cu}(\text{malH}_2\text{O})\text{ClO}_4]_2$, содержащие маг-

нитные ионы Cu^{2+} со спином $\frac{1}{2}$ [9–11]. Очень интересным примером соединения со структурой F-AF дельта-цепочки являются циклические комплексы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ [12], состоящие из 10 треугольников с ионами Gd (со спином $\sigma = \frac{7}{2}$)

в вершинах и ионами Fe $\left(S = \frac{5}{2}\right)$ в основаниях. Спин основного состояния этих молекул имеет рекордное значение $S = 60$. Ожидается, что это соединение весьма перспективно для использования в молекулярной спинтронике и для создания эффективных магнитоохлаждающих устройств.

Магнитные свойства F-AF дельта-цепочки существенно зависят от параметра фрустрации $\alpha = J_2 / |J_1|$. Известно [13], что основное состояние изотропной F-AF модели с $S = \sigma = \frac{1}{2}$ ферромагнитно, если $\alpha < \frac{1}{2}$ и ферримагнитно при $\alpha > \frac{1}{2}$, т.е. значение $\alpha_c = \frac{1}{2}$ соответствует квантовой критической

точке модели. Нами было показано [14], что основное состояние $s = \frac{1}{2}$ изотропной F-AF-модели в критической точке состоит из локализованных состояний, подобных тем, которые существуют в дельта-цепочке с антиферромагнитными взаимодействиями. Однако энергии локализованных состояний в последней выше энергии основного синглетного состояния, и они становятся основными только в магнитном поле, близком к полю насыщения. Как показано в [14, 15], локализованные состояния в F-AF-модели являются основными в нулевом магнитном поле и, что более существенно, наряду с многомагнонными изолированными состояниями в F-AF-модели имеется еще один класс связанных магнонных комплексов, построенных из перекрывающихся локализованных состояний. Все эти состояния имеют нулевую энергию, как и ферромагнитное состояние, и принадлежат к основному состоянию. Число этих состояний W при $n \gg 1$, равно $W = 2n$. Таким образом, основное состояние экспоненциально (макроскопически) вырождено, а энтропия на спин при нулевой температуре конечна и равна $\frac{1}{2} \ln 2 = 0,3465$. Интересно отметить, что число изолированных магнонов, дающих вклад в основное состояние, равно $W_0 = 1,618^n$ и оно экспоненциально мало по сравнению с W . Это означает, что подавляющий вклад в число основных состояний вносят многомагнонные связанные комплексы.

Интересно рассмотреть расширение $s = \frac{1}{2}$ F-AF дельта-цепочки на случай анизотропных обменных взаимодействий и других значений спинов. В данной работе мы рассмотрим F-AF дельта-цепочку с анизотропией и спином основания $S = 1$ и спином вершин $\sigma = \frac{1}{2}$.

Макроскопическое вырождение основного состояния

Мы начнем изучение этой модели с рассмотрения одномагнетонных состояний. Имеются две ветви в спектре состояний с $S^z = S_{\max}^z - 1$ ($S_{\max}^z = \frac{3n}{2}$), энергии которых равны (далее мы примем $J_1 = -1$):

$$E(k) = J_2 (\cos k - \Delta_2) + \frac{3\Delta_1}{2} \pm \sqrt{\left[J_2 (\cos k - \Delta_2) + \frac{3\Delta_1}{2} \right]^2 - 2\Delta_1 [J_2 (\cos k - \Delta_2) + \Delta_1] + 1 + \cos k} . \quad (2)$$

Условие того, что нижняя ветвь спектра (2) является плоской, приводит к соотношению

$$J_2 = \frac{1}{4\Delta_1} . \quad (3)$$

Независимость энергии нижней ветви спектра от импульса k соответствует тому, что одномагнетонные состояния локализованы и могут быть выбраны в виде

$$\varphi_i |F\rangle = \left(\sigma_i^- + \frac{1}{4\Delta_1} S_i^- + \sigma_{i+1}^- \right) |F\rangle , \quad (4)$$

где $|F\rangle$ – ферромагнитное состояние со всеми спинами вверх, а σ_i^- и S_i^- – понижающие операторы. Волновая функция (4) локализована в долине между соседними треугольниками.

Состояние (4) является точным, но потребуем также, чтобы его энергия была равна нулю, как и энергия ферромагнитного состояния. (Как будет ясно из нижеследующего, это необходимо для возникновения макроскопического вырождения основного состояния.) Условие того, что энергия нижней ветви (2) равна нулю, приводит к следующему соотношению для параметров анизотропии взаимодействий:

$$\Delta_2 = 2\Delta_1^2 - 1 . \quad (5)$$

Чтобы доказать, что энергия основного состояния F-AF дельта-цепочки при выполнении условий (3) и (5) равна нулю, представим гамильтониан (1) в виде

$$H = \sum_{i=1}^n H_i , \quad (6)$$

где H_i – гамильтониан i -го треугольника:

$$H_1 = - \left[\left(S_1^x + S_3^x \right) \sigma_2^x + \left(S_1^y + S_3^y \right) \sigma_2^y + \Delta_1 \left(S_1^z + S_3^z \right) \sigma_2^z - \Delta_1 \right] +$$

$$+J_2 \left[S_1^x S_3^x + S_1^y S_3^y + \Delta_2 S_1^z S_3^z - \Delta_2 \right], \quad (7)$$

параметры взаимодействий J_2 и Δ_2 определены соотношениями (3) и (5).

Спектр гамильтониана (7) состоит из 18 состояний, из которых 10 имеют энергию $E = 0$ (2 состояния с $S^z = \pm \frac{5}{2}$, 4 состояния с $S^z = \pm \frac{3}{2}$ и 4 состояния с $S^z = \pm \frac{1}{2}$), а остальные – энергию $E > 0$. Поскольку гамильтонианы соседних треугольников не коммутируют друг с другом, энергия основного состояния E_0 удовлетворяет неравенству

$$E_0 \geq \sum E_{0i} = 0, \quad (8)$$

где E_{0i} – энергия основного состояния i -го треугольника ($E_{0i} = 0$).

Неравенство (8) превращается в равенство, так как энергия основного состояния в спиновых секторах $S^z = S_{\max}^z$ и $S^z = S_{\max}^z - 1$ равна нулю.

Возникает вопрос, как много состояний в других спиновых секторах имеют нулевую энергию и, следовательно, также принадлежат основному состоянию модели?

Рассмотрим, например, двухмагнетонный спиновый сектор $S^z = S_{\max}^z - 2$. Очевидно, что пары изолированных магнетонов являются точными состояниями с нулевой энергией. Однако они не исчерпывают всех типов двухмагнетонных состояний, дающих вклад в основное состояние. Рассмотрим, например, двухмагнетонное состояние следующего вида:

$$\Phi_i (\Phi_{i-1} + C\Phi_i + \Phi_{i+1}) |F\rangle, \quad (9)$$

где $C = 2\Delta_1^2 - 1$.

Можно убедиться, что (9) является точной волновой функцией с нулевой энергией гамильтонианов H_{i-1}, H_i, H_{i+1} и всех других. Функция (9) содержит перекрывающиеся магнетоны и описывает двухмагнетонный связанный комплекс. Основное состояние в спиновом секторе $S^z = S_{\max}^z - 2$ состоит из $\frac{n(n-3)}{2}$ пар изолированных магнетонов и n комплексов (9). Таким образом,

полное число основных двухмагнетонных состояний равно C_n^2 .

Функции типа (9) могут быть обобщены на многомагнетонный случай, так что они описывают многомагнетонные комплексы. Анализ, подобный проведенному нами ранее [14–17] для изотропной $s = \frac{1}{2}$ F-AF дельта-цепочки, показывает, что полное число основных состояний $W(n, k)$ в секторе $S^z = S_{\max}^z - k$ равно:

$$W(n, k) = C_n^k, 0 \leq k \leq \frac{n}{2}; W(n, k) = C_n^{n/2}, \frac{n}{2} \leq k \leq \frac{3n}{2}. \quad (10)$$

Полное число вырожденных основных состояний $W(n)$ равно:

$$W(n) = 2^n + 2nC_n^{n/2}. \quad (11)$$

Результаты (10) и (11) были подтверждены в численных расчетах конечных F-AF дельта-цепочек.

Согласно уравнению (11) основное состояния F-AF дельта-цепочки со спинами $S=1$ и $\sigma = \frac{1}{2}$ макроскопически вырождено и энтропия на узел s_0 при $T=0$ конечна и равна $s_0 = \frac{1}{2} \ln 2$.

Уравнения (3) и (5) определяют однопараметрическую критическую линию, зависящую от Δ_1 и разделяющую фазы основного состояния. При изменении параметра анизотропии Δ_1 от $\Delta_1=0$ до $\Delta_1=\infty$ модель интерполирует между изотропной $s=1$ ферромагнитной цепочкой на основаниях треугольников и моделью Изинга на дельта-цепочке. Гамильтониан последней имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^n (S_{i-1}^z + S_i^z) \sigma_i^z + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_{i-1}^z S_i^z. \quad (12)$$

Основное состояние этой модели также макроскопически вырождено и число вырожденных основных состояний $W(n)$ может быть найдено с использованием метода трансфер-матрицы. При $n \gg 1$ оно равно:

$$W(n) = \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)^n \approx 3,561^n. \quad (13)$$

Поперечные взаимодействия при конечных значениях Δ_1 частично снимают это вырождение до значения $W(n) \approx 2^n$. В другом пределе $\Delta_1=0$, $W(n) = 2^n(2n+1)$. На всей остальной критической линии вырождение основного состояния дается выражением (11).

Одно из интересных особенностей модели на критической линии является ее низкотемпературное поведение в магнитном поле. Намагниченность на спин m , вычисленная с учетом вклада только основных состояний (что справедливо при $h \gg \frac{T}{n}$), равна:

$$m = \frac{3}{2} - \frac{1}{1 + e^{h/T}}. \quad (14)$$

Как следует из этого уравнения, намагниченность при $h=0$ равна 1. Таким образом, дельта-цепочка магнитоупорядочена на критической линии, и намагниченность испытывает скачок от $m=3/2$ в ферромагнитной фазе к $m=1$ на критической линии.

Как мы отмечали ранее, критическая линия разделяет фазы основного состояния. При $J_2 < \Delta_1 / 4$ основное состояние ферромагнитно. Как показывают численные расчеты, основное состояние в области $J_2 > \Delta_1 / 4$ ферромагнитно при $\Delta_1 \leq 1$ (с намагниченностью $m = 1$) и имеет $S^z = 0$ для $\Delta_1 > 1$.

Заключение

Мы рассмотрели основное состояние квантовой спиновой дельта-цепочки со спинами $\frac{1}{2}$ в вершинах и спинами 1 в основаниях и анизотропными обменными взаимодействиями ферро- и антиферромагнитного типов. При определенном соотношении величин взаимодействий нижайшая ветвь в спектре одномагнитных состояний становится (бездисперсионной) плоской, что означает существование точных локализованных состояний. Эти локализованные состояния принадлежат к множеству основных состояний. Наряду с наличием изолированных многомагнитных состояний, также являющихся основными, существуют связанные многомагнитные комплексы, вносящие определяющий вклад в макроскопическое вырождение основного состояния. Весьма необычным свойством модели на критической линии является вырождение основного состояния по значению проекции полного спина S^z : состояния со всеми возможными значениями S^z являются основными. При выбранном соотношении обменных взаимодействий модель зависит от одного параметра, в качестве которого выбран параметр анизотропии Δ_1 . В предельных случаях $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 = \infty$ модель сводится к изотропной ферромагнитной цепочке спинов основания и модели Изинга на дельта-цепочке. Важно отметить, что вырождение основного состояния при всех значениях Δ_1 (за исключением предельных) одно и то же и приводит к ненулевой энтропии при $T = 0$.

При выполнении условий (3) и (5) модель описывает фазовую границу между ферромагнитным и ферримагнитным (или с $S^z = 0$) основным состояниями.

Список литературы

1. Diep H. T., Giacomini H. Frustration – Exactly Solved Frustrated Models // Frustrated Spin Systems. Singapore : World Scientific, 2013. P. 1–58.
2. Introduction to frustrated magnetism. Materials, Experiment, Theory / ed. by C. Lacroix, P. Mendels., F. Mila. Berlin : Springer-Verlag, 2011. 708 p.
3. Derzhko O., Richter J., Maksymenko M. Strongly correlated flat-band systems: The route from Heisenberg spins to Hubbard electrons // Int. J. Modern Phys. 2015. Vol. 29. P. 1 530 007.
4. Zhitomirsky M. E., Tsunetsugu H. Exact low-temperature behavior of a kagome antiferromagnet at high fields // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. P. 100 403.
5. Schnack J., Schmidt H.-J., Richter J., Schulenberg J. Independent magnon states on magnetic polytopes // Eur. Phys. J. B. 2001. Vol. 24. P. 475–481.
6. Derzhko O., Richter J. Finite low-temperature entropy of some strongly frustrated quantum spin lattices in the vicinity of the saturation field // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. P. 104 415.

7. Derzhko O., Richter J., Schulenburg J. Magnetic-Field Induced Spin-Peierls Instability in Strongly Frustrated Quantum Spin Lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 107 206.
8. Zhitomirsky M. E., Tsunetsugu H. Lattice gas description of pyrochlore and checkerboard antiferromagnets in a strong magnetic field // *Phys. Rev. B.* 2007. Vol. 75. P. 224 416.
9. Ruiz-Perez C., Hernandez-Molina M., Lorenzo-Luis P. [et al.]. Magnetic coupling through the carbon skeleton of malonate in two polymorphs of $[\text{Cu}(\text{bpy})(\text{H}_2\text{O})][\text{Cu}(\text{bpy})(\text{mal})(\text{H}_2\text{O})](\text{ClO}_4)_2$ (H_2mal = malonic acid; bpy = 2,2'-bipyridine) // *Inorg. Chem.* 2000. Vol. 39 (17). P. 3845–3852.
10. Inagaki Y., Narumi Y., Kindo K. [et al.]. Ferro-antiferromagnetic delta-chain system studied by high field magnetization measurements // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2005. Vol. 74. P. 2831–2835.
11. Kaburagi M., Tonegawa T., Kang J. Ground state phase diagrams of an anisotropic spin-12 Δ -chain with ferro- and antiferromagnetic interactions // *J. Appl. Phys.* 2005. Vol. 97. P. 10B306.
12. Baniodeh A., Magnani N., Lan Y. [et al.]. High spin cycles: topping the spin record for a single molecule verging on quantum criticality // *NPJ Quantum Materials.* 2018. Vol. 3. P. 10.
13. Tonegawa T., Kaburagi M. Ground-state properties of an $S = 12\Delta$ -chain with ferro-and antiferromagnetic interactions // *J. Magn. Magn. Mater.* 2004. Vol. 272. P. 898–899.
14. Krivnov V. Ya., Dmitriev D. V., Nishimoto S., Drechsler S.-L., Richter J. Delta chain with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions at the critical point // *Phys. Rev. B.* 2014. Vol. 90. P. 014 441.
15. Dmitriev D. V., Krivnov V. Ya. Low-temperature properties of a classical zigzag spin chain near the ferromagnet-helimagnet transition point // *Phys. Rev. B.* 2015. Vol. 82. P. 054 407.
16. Dmitriev D. V., Krivnov V. Ya., Richter J., Schnack J. Thermodynamics of a delta chain with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions // *Phys. Rev. B.* 2019. Vol. 99. P. 094 410.
17. Dmitriev D. V., Krivnov V. Ya., Richter J., Schnack J. Exact magnetic properties for classical delta-chains with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions in applied magnetic field // *Phys. Rev. B.* 2020. Vol. 101. P. 054 427.

References

1. Diep H.T., Giacomini H. Frustration – Exactly Solved Frustrated Models. *Frustrated Spin Systems*. Singapore: World Scientific, 2013:1–58.
2. Lacroix C., Mendels P., Mila F. (eds.). Introduction to frustrated magnetism. Materials, Experiment, Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2011:708.
3. Derzhko O., Richter J., Maksymenko M. Strongly correlated flat-band systems: The route from Heisenberg spins to Hubbard electrons. *Int. J. Modern Phys.* 2015;29:1 530 007.
4. Zhitomirsky M.E., Tsunetsugu H. Exact low-temperature behavior of a kagome antiferromagnet at high fields. *Phys. Rev. B.* 2004;70:100 403.
5. Schnack J., Schmidt H.-J., Richter J., Schulenburg J. Independent magnon states on magnetic polytopes. *Eur. Phys. J. B.* 2001;24:475–481.
6. Derzhko O., Richter J. Finite low-temperature entropy of some strongly frustrated quantum spin lattices in the vicinity of the saturation field. *Phys. Rev. B.* 2004;70:104 415.
7. Derzhko O., Richter J., Schulenburg J. Magnetic-Field Induced Spin-Peierls Instability in Strongly Frustrated Quantum Spin Lattices. *Phys. Rev. Lett.* 2004;93:107 206.
8. Zhitomirsky M.E., Tsunetsugu H. Lattice gas description of pyrochlore and checkerboard antiferromagnets in a strong magnetic field. *Phys. Rev. B.* 2007;75:224 416.

9. Ruiz-Perez C., Hernandez-Molina M., Lorenzo-Luis P. et al. Magnetic coupling through the carbon skeleton of malonate in two polymorphs of $[\text{Cu}(\text{bpy})(\text{H}_2\text{O})][\text{Cu}(\text{bpy})(\text{mal})(\text{H}_2\text{O})](\text{ClO}_4)_2$ (H_2mal = malonic acid; bpy = 2,2'-bipyridine). *Inorg. Chem.* 2000;39(17):3845–3852.
10. Inagaki Y., Narumi Y., Kindo K. et al. Ferro-antiferromagnetic delta-chain system studied by high field magnetization measurements. *J. Phys. Soc. Jpn.* 2005;74:2831–2835.
11. Kaburagi M., Tonegawa T., Kang J. Ground state phase diagrams of an anisotropic spin-12 Δ -chain with ferro- and antiferromagnetic interactions. *J. Appl. Phys.* 2005;97:10B306.
12. Baniodeh A., Magnani N., Lan Y. et al. High spin cycles: topping the spin record for a single molecule verging on quantum criticality. *NPJ Quantum Materials*. 2018;3:10.
13. Tonegawa T., Kaburagi M. Ground-state properties of an $S = 12\Delta$ -chain with ferro- and antiferromagnetic interactions. *J. Magn. Magn. Mater.* 2004;272:898–899.
14. Krivnov V.Ya., Dmitriev D.V., Nishimoto S., Drechsler S.-L., Richter J. Delta chain with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions at the critical point. *Phys. Rev. B.* 2014;90:014 441.
15. Dmitriev D.V., Krivnov V.Ya. Low-temperature properties of a classical zigzag spin chain near the ferromagnet-helimagnet transition point. *Phys. Rev. B.* 2015;82:054 407.
16. Dmitriev D.V., Krivnov V.Ya., Richter J., Schnack J. Thermodynamics of a delta chain with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions. *Phys. Rev. B.* 2019;99:094 410.
17. Dmitriev D.V., Krivnov V.Ya., Richter J., Schnack J. Exact magnetic properties for classical delta-chains with ferromagnetic and antiferromagnetic interactions in applied magnetic field. *Phys. Rev. B.* 2020;101:054 427.

Информация об авторах / Information about the authors

Валерий Яковлевич Кривнов

доктор физико-математических наук,
заведующий отделом электрофизики
органических материалов и наноструктур,
Институт биохимической физики
имени Н. М. Эмануэля Российской
академии наук (Россия, г. Москва,
ул. Косыгина, 4)

E-mail: krivnov@deom.chph.ras.ru

Valeriy Ya. Krivnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, head of the department
of electrophysics of organic materials
and nanostructures, Institute of Biochemical
Physics named after N.M. Emanuel
of the Russian Academy of Sciences
(4 Kosygina street, Moscow, Russia)

Дмитрий Владимирович Дмитриев

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Институт биохимической физики
имени Н. М. Эмануэля Российской
академии наук (Россия, г. Москва,
ул. Косыгина, 4)

E-mail: dmitriev@deom.chph.ras.ru

Dmitriy V. Dmitriev

Candidate of physical and mathematical
sciences, senior staff scientist, Institute
of Biochemical Physics named after
N.M. Emanuel of the Russian Academy
of Sciences (4 Kosygina street,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 05.11.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 18.11.2024

Принята к публикации / Accepted 29.11.2024